1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) - ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο, σελ.262(i)
Α2) Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο, σελ.141
Α3) Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο, σελ.246
Α4) **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1) Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

Είναι $f'(x)=\dfrac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Έστω: $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\ge 0 \overset{(x^2+1)^2>0}{\Leftrightarrow} 2x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Αφού $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.
Αφού $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, με $f_{\min}=f(0)=0$.

Β2) Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

Είναι $f''(x)=\dfrac{2\cdot\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\dfrac{2\cdot\left(x^2+1\right)^2-8x^2\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\dfrac{2\cdot\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $x\in\mathbb{R}$.

Έστω: $f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\cdot\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}\ge 0 \overset{\left(1-3x^2\right)^3>0}{\Leftrightarrow} 1-3x^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2\le\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow |x|\le\sqrt{\dfrac{1}{3}} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le x\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$

Αφού $f''(x)<0$ στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ και η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, τότε η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Αφού $f''(x)>0$ στο $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ και η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, τότε η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Αφού $f''(x)<0$ στο $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ και η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$, τότε η f είναι κοίλη στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, με $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{4}$, άρα το σημείο $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$, με $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{4}$, άρα το σημείο $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

B3) Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$,

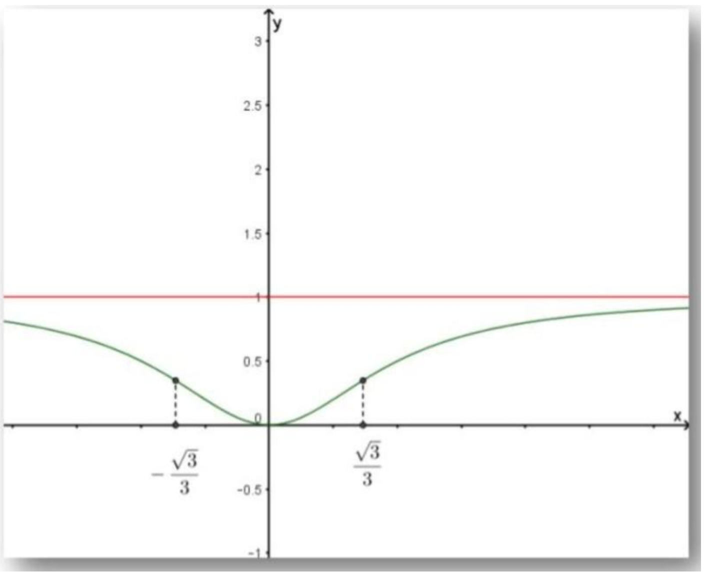
άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$,

άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

B4) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η g συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $g'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω: $2x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

Έστω: $e^{x^2}-1\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1\Leftrightarrow e^{x^2}\geq e^0\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2\geq 0$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{x^2}-1$	$+$	0	$+$
$2x$	$-$	0	$+$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Παρατηρούμε ότι: $g(0)=0$.

Για κάθε $x<0\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$.

Για κάθε $x>0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$.
Επομένως για κάθε $x\neq 0$ ισχύει ότι $g(x)>0$. Άρα μόνο για $x=0$ ισχύει ότι $g(0)=0$.

Άρα η μοναδική λύση της g είναι η $x=0$, δηλαδή: $e^{x^2}-x^2-1=0\Leftrightarrow x=0$.

Γ2) Από το (Γ1) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ (1). Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Έχουμε: $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2\Leftrightarrow|f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\overset{(1)}{\Leftrightarrow}|f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$.

Έστω $f(x)=0\Leftrightarrow|f(x)|=0\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0\Leftrightarrow x=0$.

Επομένως η f έχει μοναδική ρίζα το 0, οπότε αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε θα έχει σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

- Αν $f(x)>0$ *στο* $(-\infty,0)$ και $f(x)>0$ *στο* $(0,+\infty)$, τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.
- Αν $f(x)<0$ *στο* $(-\infty,0)$ και $f(x)<0$ *στο* $(0,+\infty)$, τότε $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$.
- Αν $f(x)<0$ *στο* $(-\infty,0)$ και $f(x)>0$ *στο* $(0,+\infty)$, τότε $f(x)=\begin{cases}-\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0\end{cases}$.
- Αν $f(x)>0$ *στο* $(-\infty,0)$ και $f(x)<0$ *στο* $(0,+\infty)$, τότε $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1, & x<0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0\end{cases}$.

Γ3) *α΄τρόπος*

Έχουμε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2xe^{x^2}-2x,\ x\in\mathbb{R}$.

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}-2=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

Αφού $4x^2e^{x^2}\geq 0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$
και $e^{x^2}-1\geq 0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$
τότε $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ και αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι κυρτή σε όλο $\mathbb{R}$.

β΄τρόπος

Έχουμε $f''(x)=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$, με $f''(0)=0$.

Είναι $f'''(x)=8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}+4xe^{x^2}=12x^3e^{x^2}+4xe^{x^2}=4xe^{x^2}(3x^2+1)$.

Έστω $f'''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 4xe^{x^2}(3x^2+1)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'''	$-$	0	$+$
f''	$\searrow$		$\nearrow$

Επομένως η f'' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 0.
Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f''(x)\geq f''(0)\Leftrightarrow f''(x)\geq 0$ .....

Γ4) *α΄τρόπος*

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x),\ x\in[0,+\infty)$.
Η h είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. (η $f(x+3)$ είναι σύνθεση παραγωγίσιμων).
Είναι $h'(x)=f'(x+3)-f'(x),\ x\in[0,+\infty)$.

Ισχύει ότι $x<x+3\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x+3)\Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0\Leftrightarrow h'(x)>0$,
άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα είναι και 1-1.
Έχουμε την εξίσωση: $f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f(x+3)-f(x)\Leftrightarrow$

$$h\left(|\eta\mu x|\right)=h(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|=x\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$$

διότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\eta\mu x|\leq|x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0.

β΄τρόπος

Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η x = 0.
Έστω ότι υπάρχει αριθμός $x_0>0$, ο οποίος είναι λύση της εξίσωσης, οπότε θα ισχύει ότι:
$f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)=f(x_0+3)-f(x_0)$ (1).
Ισχύουν τα εξής: $|\eta\mu x_0|<|\eta\mu x_0|+3$ και $x_0<x_0+3$.
Επίσης αφού $x_0>0$ θα ισχύει ότι $|\eta\mu x_0|<x_0$.

<u>1η περίπτωση:</u> αν $|\eta\mu x_0|+3<x_0$
τότε θα ισχύουν: $|\eta\mu x_0|<|\eta\mu x_0|+3<x_0<x_0+3$.
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f
▪ στο διάστημα $\left[|\eta\mu x_0|,|\eta\mu x_0|+3\right]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi_1\in\left(|\eta\mu x_0|,|\eta\mu x_0|+3\right): f'(\xi_1)=\frac{f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)}{|\eta\mu x_0|+3-|\eta\mu x_0|}\Leftrightarrow 3f'(\xi_1)=f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)$$

▪ στο διάστημα $\left[x_0,x_0+3\right]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi_2\in\left(x_0,x_0+3\right): f'(\xi_2)=\frac{f\left(x_0+3\right)-f\left(x_0\right)}{x_0+3-x_0}\Leftrightarrow 3f'(\xi_2)=f\left(x_0+3\right)-f\left(x_0\right)$$

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow 3f'(\xi_1)=3f'(\xi_2)\Leftrightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)\overset{f'\nearrow}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}}\xi_1=\xi_2$. ΑΤΟΠΟ!, διότι $\xi_1<\xi_2$

<u>2η περίπτωση:</u> αν $|\eta\mu x_0|+3\ge x_0$
τότε θα ισχύουν: $|\eta\mu x_0|<x_0\le|\eta\mu x_0|+3<x_0+3$.
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f
▪ στο διάστημα $\left[|\eta\mu x_0|,x_0\right]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi_1\in\left(|\eta\mu x_0|,x_0\right): f'(\xi_1)=\frac{f\left(x_0\right)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)}{x_0-|\eta\mu x_0|}$$

▪ στο διάστημα $\left[|\eta\mu x_0|+3,x_0+3\right]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi_2\in\left(|\eta\mu x_0|+3,x_0+3\right): f'(\xi_2)=\frac{f\left(x_0+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)}{x_0-3-|\eta\mu x_0|-3}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{f\left(x_0+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)}{x_0-|\eta\mu x_0|}$$

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow f(x_0)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)=f(x_0+3)-f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)\overset{x_0-|\eta\mu x_0|>0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow\frac{f\left(x_0\right)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)}{x_0-|\eta\mu x_0|}=\frac{f\left(x_0+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)}{x_0-|\eta\mu x_0|}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)\overset{f'\nearrow}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}}\xi_1=\xi_2$$

ΑΤΟΠΟ!, διότι $\xi_1<\xi_2$

Επομένως η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η x = 0.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Έχουμε ότι: $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot \eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot \eta\mu x dx+\int_0^{\pi} f''(x)\cdot \eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)'dx+\int_0^{\pi}\left(f(x)\right)'\cdot \eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$\left[-f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0+\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx+f'(\pi)-f'(0)\eta\mu 0-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$f(\pi)+f(0)=\pi$ (1).

Έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

Άρα $f(x)=g(x)\eta\mu x$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\eta\mu x\right)=1\cdot 0=0$.

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε θα είναι συνεχής και στο 0, οπότε: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\Leftrightarrow \boxed{f(0)=0}$

Άρα, από (1) $\Leftrightarrow f(\pi)+0=\pi \Leftrightarrow \boxed{f(\pi)=\pi}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1\Leftrightarrow \boxed{f'(0)=1}$

<u>β΄ τρόπος</u> για το $f(0)$

Είναι: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot \eta\mu x=1\cdot 0=0$

<u>β΄ τρόπος</u> για το $f'(0)$

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η f' θα είναι συνεχής, οπότε:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{(\eta\mu x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{f'(0)}{1}=f'(0)$, οπότε $f'(0)=1$

<u>γ΄ τρόπος</u> για το $f'(0)$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\cdot\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0} g(x)\dfrac{\eta\mu x}{x}1\cdot 1=1$

Δ2) α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο, τότε από το θεώρημα Fermat θα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

Έχουμε ότι $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^x$ (1) , $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι σύνθεση παραγωγίσιμων.
Η συνάρτηση x είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.
Η συνάρτηση $f\left(f(x)\right)$ είναι σύνθεση παραγωγίσιμων.

Η συνάρτηση e^x είναι παραγωγίσιμη ως εκθετική.

Επομένως από (1) θα έχουμε: $\left(e^{f(x)}+x\right)'=\left(f\left(f(x)\right)+e^x\right)' \Leftrightarrow$

$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+e^x$ (2).

Θέτουμε στην (2) όπου $x=x_0$, οπότε θα έχουμε:

Από $e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)+e^{x_0} \overset{f'(x_0)=0}{\Leftrightarrow} 1=e^{x_0} \Leftrightarrow x_0=1$.

Άρα $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0$, ΑΤΟΠΟ! , διότι $f'(0)=1$. Επομένως η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Αφού η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, τότε θα ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f' είναι και συνεχής, τότε θα έχει σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$.

Έχουμε ότι $f'(0)=1>0$, οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3) Έχουμε ότι $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$, δηλαδή $f\left((-\infty,+\infty)\right)=(-\infty,+\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$f\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$. Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Είναι: $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\dfrac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\le\dfrac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\le\dfrac{1+1}{|f(x)|}=\dfrac{2}{|f(x)|}$

άρα $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\le\dfrac{2}{|f(x)|}\Leftrightarrow -\left|\dfrac{2}{f(x)}\right|\le\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\left|\dfrac{2}{f(x)}\right|$.

με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{2}{f(x)}\right|\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\dfrac{2}{f(x)}\right|\right)=0$.

Επομένως από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4) Για το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx$, θέτουμε $\ln x = u$, άρα $\frac{1}{x}dx = du$.

Για $x=1$, έχουμε $u=\ln 1 = 0$.

Για $x=e^{\pi}$, έχουμε $u=\ln e^{\pi}=\pi$.

Άρα $\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_0^{\pi} f(u)du = \int_0^{\pi} f(x)dx$.

Επομένως αρκεί ν.δ.ο. $0<\int_0^{\pi} f(x)dx<\pi^2$.

α΄τρόπος

Είναι $0\le x\le \pi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0)\le f(x)\le f(\pi) \Leftrightarrow 0\le f(x)\le \pi$.

Το ίσον δεν ισχύει πάντα, οπότε ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\int_0^{\pi} 0dx<\int_0^{\pi} f(x)dx\le\int_0^{\pi}\pi dx \Leftrightarrow 0<\int_0^{\pi} f(x)dx<[\pi x]_0^{\pi} \Leftrightarrow 0<\int_0^{\pi} f(x)dx<\pi^2$$

β΄τρόπος

Αφού f είναι συνεχής, θεωρούμε μία παράγουσα F της f στο $\mathbb{R}$.

Οπότε θα ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε και η F' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,\pi]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi)=\frac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0}=\frac{F(\pi)-F(0)}{\pi}$.

Είναι $0<\xi<\pi \overset{F'\nearrow}{\Leftrightarrow} F'(0)<F'(\xi)<F'(\pi) \Leftrightarrow f(0)<\frac{F(\pi)-F(0)}{\pi}<f(\pi) \Leftrightarrow$

$$0<\frac{F(\pi)-F(0)}{\pi}<\pi \Leftrightarrow 0<F(\pi)-F(0)<\pi^2 \Leftrightarrow 0<\int_0^{\pi} f(x)dx<\pi^2$$